Chapitre X

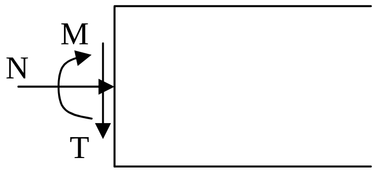
La flexion composée

Chapitre X : La flexion composée

I – Définition :

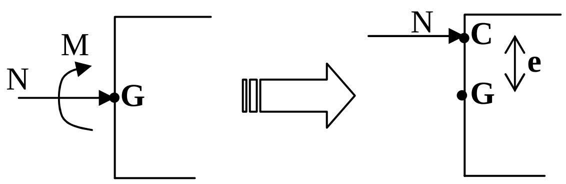
Une poutre est sollicitée en flexion composée si la réduction au centre de gravité (CDG) d'une section S des forces situées à gauche de cette section se décomposes.

- Couple de moment M d'axe ⊥ à la fibre moyenne.
- Effort normal N ⊥ à la section.
- Effort tranchant T dans le plan de la section.



II – Généralités : Le système formé par le moment fléchissant (M) et l'effort normal (N) peut être remplacé par une force unique équivalente à (N) et appliquée au point (C) appelé point d'application ou centre de pression.

Donc on remplace (M,N) → N au centre de pression tel que la distance GC = e.

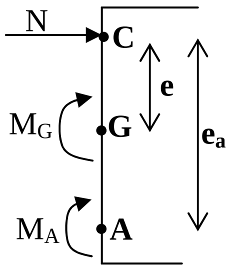


G : centre de gravité de la section.

C : point d'application (N)

e : excentricité. $GC = e = \dfrac{M}{N}$

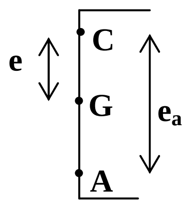
- En flexion composée, il faut toujours préciser en quel point on effectue la réduction des forces car la valeur des moments est dépendante de ce point. Ce point sera normalement, soit au CDG du béton (sans armatures) = (G); soit au centre de gravité des armatures tendues (A).



$$e = \frac{M_G}{N} \quad ; \quad e_a = \frac{M_A}{N}$$

- En flexion composée, la première chose à faire est de chercher la position du centre de pression (C)

- Si (N) est un effort de compression (C) sera posé au dessus de (G).

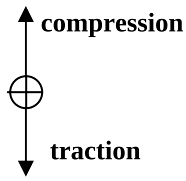


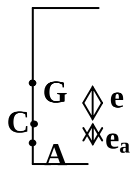
$\Rightarrow$ $\mathbf{e_a \geq e}$

- Le point (C) peut se situer en dehors de la section donc "e" peut être supérieure à $\frac{h}{2}$:

$e > \frac{h}{2}$

- Si (N) est un effort de traction (C) sera posé au dessous de (G). (au coté de (A))



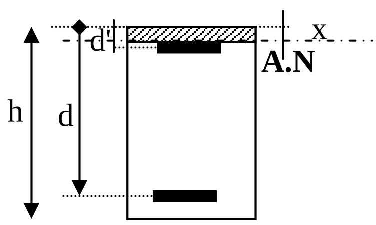


$CA = e_a$

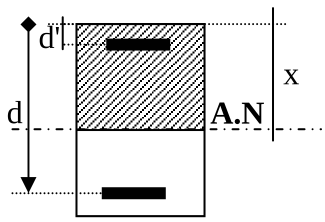
$GC = e$

C : peut être en dehors de la section.

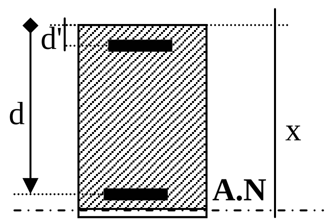
- Les équations d'équilibre en flexion composée s'établissent de la même manière que la flexion simple avec 3 différences :
  - $N \neq 0$.
  - La section peut être totalement comprimée.
  - Les sollicitations doivent être calculées à l'origine, que nous prendrons le point (A).
- En flexion composée, la section peut être partiellement comprimée sous un effort de traction ou compression: Nous avons 3 cas de position de l'axe neutre :



$x \leq d'$

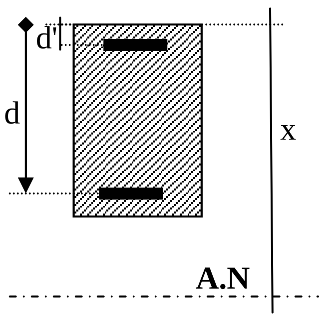


$d' < x < d$



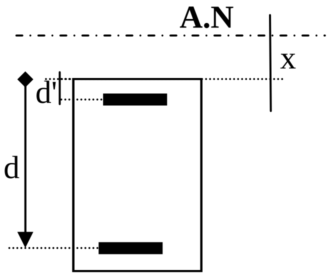
$x \geq d$

- La section peut être entièrement comprimée sous un effort de compression :



$\Rightarrow$ **$x > h$**

- La section peut être entièrement tendue sous un effort de traction :

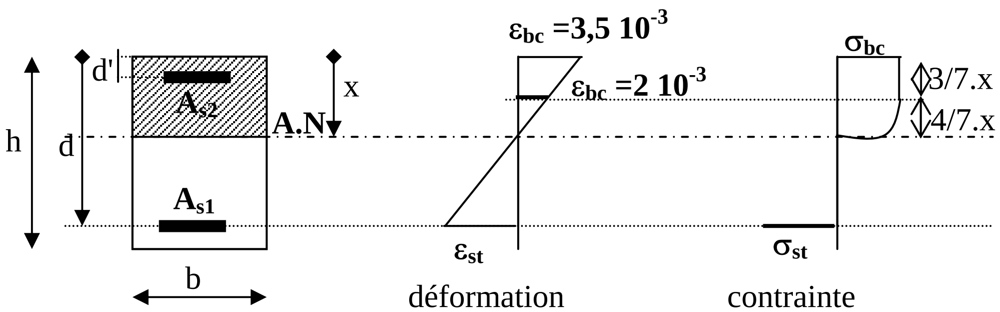


$\Rightarrow$ **x < 0**

III- Etat limite ultime de résistance pour une section rectangulaire :

1- Courbe de référence d'une section :

a- Section partiellement comprimée : (Domaine 2 – pivot B)



$$N_b = b.\int_{d-x}^{d} \sigma(z).dz = 0{,}81.b.\,x.\sigma_{bc}$$

$$M_b = b.\int_{d-x}^{d} z.\sigma(z).\,dz = 0{,}81.b.\,x.\sigma_{bc}.(d-0{,}416.x)$$

$$= 0{,}81.b.\ \alpha.d^2.\sigma_{bc}.(d-0{,}416.\alpha)$$

Alors le moment réduit μ_u sera : $\mu_u = \dfrac{M_b}{b.d^2.\sigma_{bc}} = 0{,}81.\ \alpha.(d-0{,}416.\alpha)$

L'effort normal réduit : $\nu_u = \dfrac{N_b}{b.d.\sigma_{bc}} = 0{,}81.\ \alpha$

La relation entre μ_u et ν_u : $\mu_u = \nu_u.\left(1-\dfrac{0{,}416\nu_u}{0{,}81}\right) \Leftrightarrow \mu_u = \nu_u.(1-0{,}514.\nu_u)$

b - Section tendue ou partiellement comprimée : (Domaine 1 – pivot A)

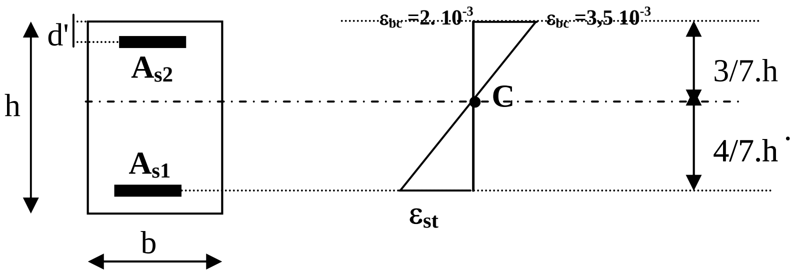
$0 \le \alpha \le 0{,}259$

x = 0 $\rightarrow$ z = d.

x = d $\rightarrow$ z = 0,89. d.

c - Section entièrement comprimée : (Domaine 3 – pivot 3)

$$x \geq \frac{h}{2}$$



$$\mu = \frac{d}{h} - 0,5 + \psi\left(\frac{6}{7} - \frac{d}{h}\right)$$

$$\nu = 1 - \psi$$

$$\psi = \frac{3,05}{\left(\frac{7x}{h} - 3\right)^2}$$

$x = h \rightarrow \psi = 0,19$

$x = \infty \rightarrow \psi = 0$

$$\mu = \frac{5}{14} - \nu\left(\frac{6}{7} - \frac{d}{h}\right)$$

d - Le tracé de la courbe de référence :

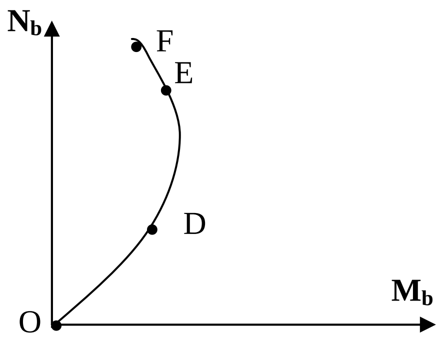
On constate de la plus part des cas que N_b est une fonction croissante de x et M_b est une fonction croissante de x et de Nb lorsque la section est partiellement commprimée et elle est décroissante lorsque la section est entièrement comprimée.

x = 0 $\rightarrow$ point O $\rightarrow$ $N_b = 0$ et $M_b = 0$.

x = d $\rightarrow$ point D $\rightarrow$ $N_b = 0,81.b.d.\sigma_{bc}$ et $M_b = 0,473.b.d^2.\sigma_{bc}$

x = h $\rightarrow$ point E $\rightarrow$ $N_b = 0,81.b.h.\sigma_{bc}$ et $M_b = 0,81.b.h.\sigma_{bc}.d\left(1 - 0,416\frac{h}{d}\right)$

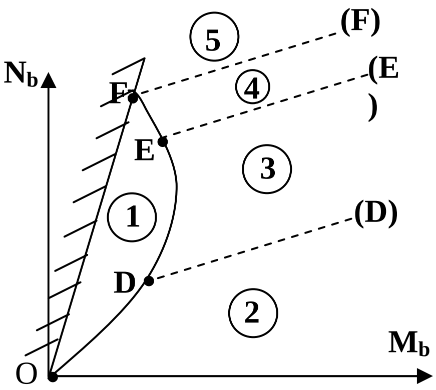
x = ∞ $\rightarrow$ point F $\rightarrow$ $N_b = b.h.\sigma_{bc}$ et $M_b = \left(d - \frac{h}{2}\right).b.h.\sigma_{bc}$



2- Domaines de fonctionnement de la section :

a- Détermination des domaines : sur la courbe de référence et à partir des points "D" et "E" et "F", on trace les droites D, E, F de pente $\frac{1}{d-d'}$. L'équation générale de ces droites sera :

$$\mathbf{M_u = M_b + (N_u - N_b).(d - d')}$$



La courbe de référence et les 3 droites D , E , F ont délimitées 5 zones. Alors les droites D, E, F auront pour équations :

Droite D :

$$M_u = M_b + (N_u - N_b).(d - d')$$

$$M_u = 0{,}473.b.d^2.\sigma_{bc} + N_u.(d - d') - 0{,}81.b.d.\sigma_{bc}.(d - d')$$

$$M_u = b.d^2.\sigma_{bc}.\left(-0{,}337 + 0{,}81.\frac{d'}{d}\right) + N_u.(d - d')$$

$$N_u.(d - d') - M_u = \left(0{,}337 - 0{,}81.\frac{d'}{d}\right).b.d^2.\sigma_{bc}$$

Droite E :

$$M_u = M_b + (N_u - N_b).(d - d')$$

$$M_u = b.h^2.\sigma_{bc}.\left(-0{,}337 + 0{,}81.\frac{d'}{h}\right) + N_u.(d - d')$$

$$N_u.(d - d') - M_u = \left(0{,}337 - 0{,}81.\frac{d'}{h}\right).b.h^2.\sigma_{bc}$$

Droite F :

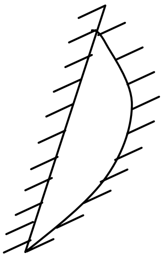
$$M_u = M_b + (N_u - N_b).(d - d')$$

$$M_u = b.h^2.\sigma_{bc}.\left(-0{,}5 + \frac{d'}{h}\right) + N_u.(d - d')$$

$$N_u.(d - d') - M_u = \left(0{,}5 - \frac{d'}{h}\right).b.h^2.\sigma_{bc}$$

b- Domaine de fonctionnement :

Zone (1) : Si on trouve dans cette zone, la section sera dite surabondante. Le point de coordonné (m , n) sera situé dans la zone (1) si les conditions suivantes sont vérifiées :

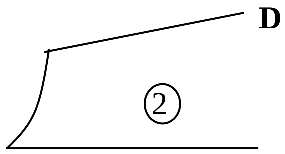


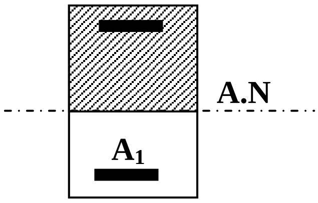
O

$$N_u \leq 0{,}81 . b . h . \sigma_{bc} \quad \text{et} \quad M_A \langle \; N_u \,.\, d \,.\, \left(1 - 0{,}514 \frac{N_u}{b . d . \sigma_{bc}}\right)$$

$$\text{Ou} \quad N_u > 0{,}81 . b . h . \sigma_{bc} \quad \text{et} \quad M_A \langle \; b \,.\, h^2 \,.\, \sigma_{bc} \,.\, \left[\frac{5}{14} - \frac{N_u}{b . h . \sigma_{bc}}\left(\frac{6}{7} - \frac{d}{h}\right)\right]$$

Zone (2) : Cette zone correspond à une section partiellement comprimée avec armatures inférieures tendues.



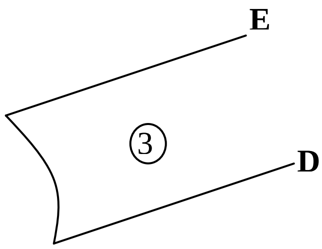


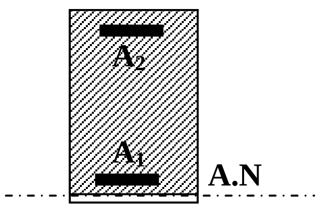
La condition qui nous indique que nous somme dans la zone (2):

$$N_u.(d - d') - M_A \leq \left(0{,}337 - 0{,}81 . \frac{d'}{d}\right) . b . d^2 . \sigma_{bc}$$

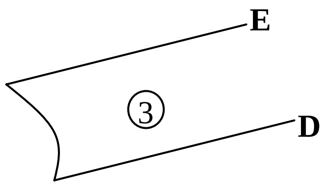
Zone (3) : Correspond à une section partiellement comprimée avec armatures inférieures comprimées.

$$\left(0{,}337 - 0{,}81 . \frac{d'}{d}\right) . b . d^2 . \sigma_{bc} < N_u.(d - d') - M_A \leq \left(0{,}337 - 0{,}81 . \frac{d'}{h}\right) . b . h^2 . \sigma_{bc}$$





Zone (4) et Zone (5) : Correspond à une section entièrement comprimée. .

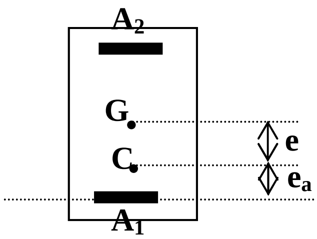


$$N_u.(d - d') - M_A > \left(0{,}337 - 0{,}81 . \frac{d'}{h}\right) . b . h^2 . \sigma_{bc}$$

IV- Détermination des armatures :

1- Section entièrement tendue :

Une section sera dite entièrement tendue, si l'effort appliqué est un effort de tarction et s'il est appliqué entre les armatures :



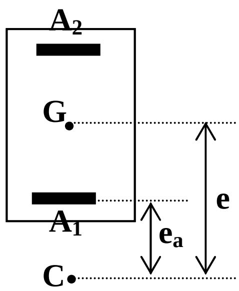
Les sections d'armatures seront données par :

$$A_1 = \frac{N_u}{\sigma_{st}} \cdot \left(1 - \frac{e_a}{d - d'}\right) \qquad \text{et} \qquad A_2 = \frac{N_u . e_a}{\sigma_{st} .(d - d')}$$

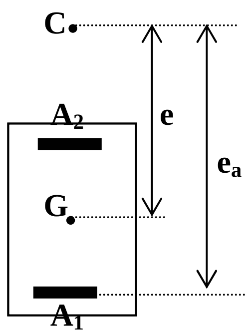
2- Section partiellement comprimée :

Une section sera partiellement comprimée si elle vérifie les conditions de la zone (2) et (3) en plus, une section sera partiellement comprimée dans les trois cas suivant :

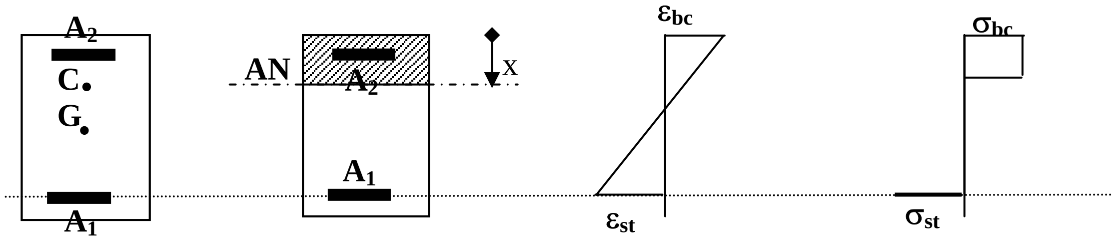
1er cas : si l'effort appliqué est un effort de traction et son point d'application est situé à l'extérieur de la section.



2ème cas : si l'effort appliqué est un effort de compression et son point d'application se situ à l'extérieur de la section.



3ème cas : si l'effort appliqué est un effort de compression et son point d'application se situ entre les armatures et s'il est proche des armatures supérieures.



$$\mu_u = \frac{M_A}{b.d^2.\sigma_{bc}}$$ On compare μ_u avec μ_l :

Si : $\mu_u \leq \mu_l$

$A_2 = 0$; $A_1 = \dfrac{1}{\sigma_{st}}\left(\dfrac{M_A}{z} \pm N\right)$

on utilise : (+) si l'effort est un effort de traction.

(-) si l'effort est un effort de compression.

Si : $A_1 < 0 \Rightarrow$ La section non ferraillée résiste aux efforts appliqués.

Si : $A_1 = 0 \Rightarrow$ La section ne nécessite pas de ferraillage.

Si : $\mu_u > \mu_l$

Le résistant s'écrit : $\mathbf{M_R = \mu_l \,.\, b \,.\, d^2 \,.\, \sigma_{bc}}$

Avec : $\mu_l = 0{,}8\,.\,\alpha_l\,.(1 - 0{,}4\,\alpha_l)$

$$A_2 = \frac{M_A - M_R}{\sigma_{sc}.(d - d')}$$

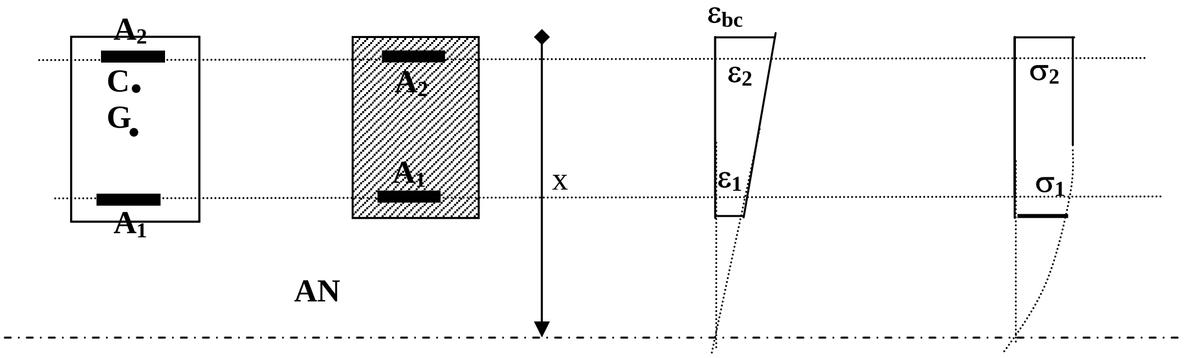
$$A_1 = \frac{1}{\sigma_{st}}\left(\frac{M_A - M_R}{(d - d')} + \frac{M_R}{d(1 - 0{,}4.\alpha_l)} \pm N\right)$$

Si : $A_1 < 0 \Rightarrow$ $A_1 = A_{min} = 0{,}23.b.d.\dfrac{f_{t28}}{fe}$

$$A_2 = \frac{N - b.\sigma_{bc}.\left[\mathrm{d'} + \sqrt{(\mathrm{d'})^2 + \dfrac{2.(d - d')N_u - M_A}{b.\sigma_{\mathrm{bc}}}}\right]}{\sigma_{\mathrm{sc}}}$$

3- Section entièrement comprimée :

Une section sera entièrement comprimée si l'effort est un effort de compression et son point d'application est entre les armatures et près du centre de gravité. Il faut vérifier les conditions des zones 4 et 5.



La vérification est faite avec les inégalités suivantes :

$$N_u .(d - d') - M_A \leq (0,5.h - d') . b . h . \sigma_{bc}.$$

Si $N_u .(d - d') - M_A \leq (0,5.h - d') . b . h . \sigma_{bc}$:

On est dans la zone 4.

$$\psi = \frac{0,5 - \frac{d'}{h} - \frac{(d-d').N_u - M_A}{b.h^2.\sigma_{bc}}}{\frac{6}{7} - \frac{d'}{h}}$$

$A_1 = 0$

$$A_2 = \frac{N_u - (1-\psi).b.h.\sigma_{bc}}{\sigma_{sc}}$$

$$\varepsilon_c = 2.10^{-3}\left[1 - \left(3 - 7\frac{d'}{h}\right)\sqrt{\frac{\psi}{1,75}}\right]$$

Si $N_u .(d - d') - M_A > (0,5.h - d') . b . h . \sigma_{bc}$:

On est dans la zone 5.

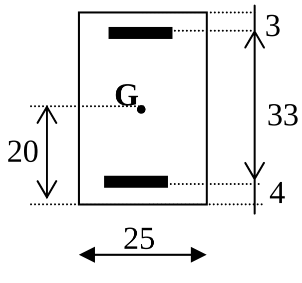
$$\varepsilon_c = 2.10^{-3} \qquad \sigma = f(2.10^{-3})$$

$$A_2 = \frac{M_A - b.h.\sigma_{bc}.(d - \frac{h}{2})}{(d-d').\sigma_{sc}}$$

$$A_1 = \frac{N_u - b.h.\sigma_{bc}}{\sigma_{sc}} - A_2$$

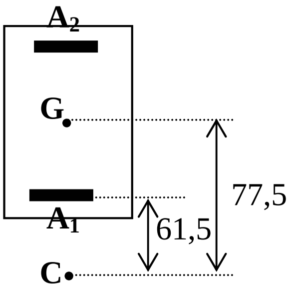
-Application : Soit une section rectangulaire soumise à l'E.L.U à un moment de flexion $M_u = 0,155$ MN et un effort de traction $N_u = 0,2$ MN. Si $f_{c28} = 25$ MPa et FeE400.

- Calculez les sections d'armatures ?



- Solution :

- L'excentricité : $e = \dfrac{M}{N} = \dfrac{0{,}155}{0{,}2}$ = 77,5 cm > $\dfrac{h}{2} = \dfrac{40}{2}$ = 20 cm.



Nous avons une section partiellement comprimée.

$e_a = e - \left(d - \dfrac{h}{2} \right) = 77{,}5 - \left(36 - \dfrac{40}{2} \right) = 61{,}5$ cm.

$M_A = N_u \cdot e_a = 0{,}2 \cdot 0{,}615 = 0{,}123$ MN.m

$0{,}81 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_{bc} = 0{,}81 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}40 \cdot 14{,}17 = 1{,}147$ MN

$$\begin{cases} N = 0{,}2 \text{ MN} < 0{,}81 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_{bc} = 1{,}147 \text{ MN} \\ M_A = 0{,}123 \text{ MN.m} > N.d.\left(1 - 0{,}514.\dfrac{N}{b.d.\sigma_{bc}}\right) = 0{,}0662 \text{ MN.m} \end{cases} \Longrightarrow$$

La section n'est pas surabondante

$N.(d - d') - M_A = 0{,}2 \cdot (0{,}36 - 0{,}03) - 0{,}123 = -0{,}057$ MN.m

$N.(d - d') - M_A = -0{,}057 \text{ MN.m} \le \left(0{,}337 - 0{,}81.\dfrac{d'}{d}\right).b.d^2.\sigma_{bc} = 0{,}124$ MN.m

On est dans la zone (2) $\Rightarrow$ S.P.C avec armatures inférieures tendues.

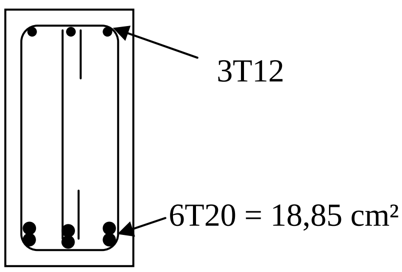
$$\mu_u = \frac{M_A}{b.d^2.\sigma_{bc}} = \frac{0{,}123}{0{,}25.(0{,}36)^2.14{,}17} = 0{,}268$$

$\underline{\mu_u = 0{,}268 \le \mu_l = 0{,}392}$

$A_2 = 0$; $A_1 = \dfrac{1}{\sigma_{st}}\left(\dfrac{M_A}{z} + N\right)$

$\alpha = 0{,}399$; $z = 0{,}3$ m.

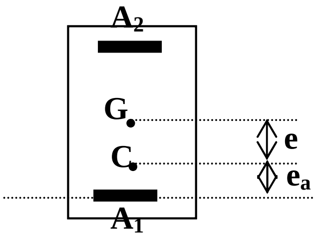
$$A_1 = \frac{1}{348}\left(\frac{0{,}123}{0{,}3} + 0{,}2\right) = 17{,}53 \text{ cm}^2 \text{ Soit } 6HA20 = 18{,}85 \text{ cm}^2.$$



V- Etat limite de service :

1 – Section entièrement tendue : Une section sera entièrement tendue, si l'effort est un effort de traction et si le centre de pression est appliqué entre les armatures.

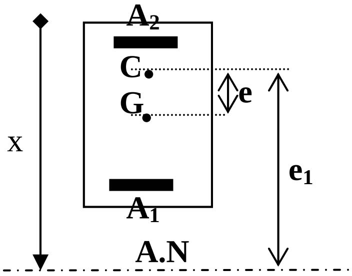
Sachant que A1 et A2 sont des sections de ferraillage choisies.



$$\sigma_{st1} = \frac{N_{ser}}{A_1}.\left[1 - \frac{e_a}{d - d'}\right]$$

$$\sigma_{st2} = \frac{N_{ser}.e_a}{A_2.d - d'}$$

2 – Section entièrement comprimée : Une section sera entièrement comprimée, si l'effort est un effort de compression et si le point C est à l'intérieur du noyau central de la section totale homogène. $e \leq \frac{h}{6}$; $e_1 = \frac{I}{S}$



I : Le moment d'inertie de la section totale.

S : Le moment statique de la section totale.

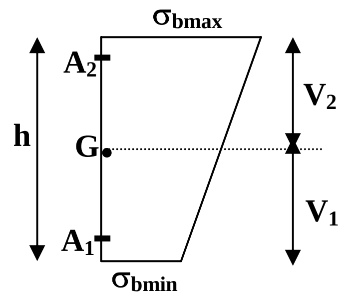
$$S_{AN} = b.h.(e_1 - e) - n.A_2.\left(e_1 - e + \frac{h}{2} - d'\right) + n.A_1.\left(e_1 - e + \frac{h}{2} - d\right)$$

$$I_{AN} = \frac{b.h^3}{12} + b.h.(e_1 - e)^2 - n.A_2.\left(e_1 - e + \frac{h}{2} - d'\right)^2 + n.A_1.\left(e_1 - e + \frac{h}{2} - d\right)^2$$

$$e_1 = \frac{-\left[\frac{b.h^3}{12} + b.h.e^2 + n.A_2.\left(-e + \frac{h}{2} - d'\right)^2 + n.A_1.\left(-e + \frac{h}{2} - d\right)^2\right]}{-b.h.e + n.A_2.\left(-e + \frac{h}{2} - d'\right) + n.A_1.\left(-e + \frac{h}{2} - d\right)}$$

Si $|e_1| < \frac{h}{2} + e$: L'axe neutre est dans la section ⇒ section partiellement comprimée.

Si $|e_1| \geq \frac{h}{2} + e$: L'axe neutre est en dehors de la section ⇒ section entièrement comprimée.



$B_0 = B + n.(A_1 + A_2)$

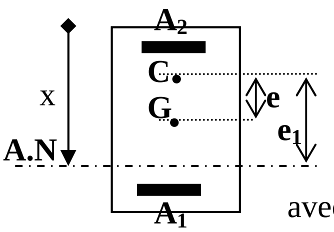
$$\sigma_{b\min} = \frac{N_s}{B_0} - \frac{M_S.V_1}{I_{AN}}$$

$$\sigma_{b\max} = \frac{N_s}{B_0} - \frac{M_S.V_2}{I_{AN}} \leq \overline{\sigma_{bc}}$$

$$V_1 = V_2 = \frac{h}{2}$$

3 – Section partiellement comprimée : Une section sera partiellement comprimée, si l'effort (soit compression ou traction) est en dehors du noyau central. $\Rightarrow \; e \geq \frac{h}{6}$.

- N est un effort de compression :



$$x = \frac{h}{2} + e_1 - e$$

$$e_1^3 + p.e_1 + q = 0$$

avec: $P = -3.\left(e - \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{6.n.A_2}{b}.\left(e - \frac{h}{2} + d'\right) + \frac{6.n.A_1}{b}.\left(e - \frac{h}{2} + d\right)$

$$q = 2.\left(e - \frac{h}{2}\right)^3 - \frac{6.n.A_2}{b}.\left(e - \frac{h}{2} + d'\right)^2 - \frac{6.n.A_1}{b}.\left(e - \frac{h}{2} + d\right)^2$$

p et q peuvent être négatif: $e_1 = \sqrt[3]{-p.e_1 - q}$

$$e_1 = \frac{-e_1^3 - q}{p}$$

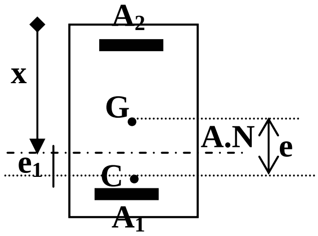
On tire le e_1 et avec on calcule *x*.

$$S = \frac{b.x^2}{2} + n.A_2.(x - d') - n.A_1.(d - x)$$

$$\sigma_{bc} = \frac{N_s.x}{S} \leq \overline{\sigma_{bc}}$$

$$\sigma_{st} = \frac{n.N_s.(d - x)}{S} \leq \overline{\sigma_{st}}$$

- N est un effort de traction :



$$x = \frac{h}{2} - e_1 + e$$

$$e_1^3 + p.e_1 + q = 0$$

avec : $P = -3.\left(e + \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{6.n.A_2}{b}.\left(e + \frac{h}{2} + d'\right) + \frac{6.n.A_1}{b}.\left(-e - \frac{h}{2} + d\right)$

$$q = 2.\left(e + \frac{h}{2}\right)^3 - \frac{6.n.A_2}{b}.\left(e + \frac{h}{2} + d'\right)^2 - \frac{6.n.A_1}{b}.\left(-e - \frac{h}{2} + d\right)^2$$

$$S = \frac{b.x^2}{2} + n.A_2.(x - d') - n.A_1.(d - x)$$

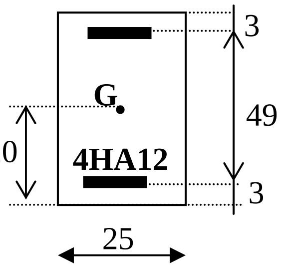
$$\sigma_{bc} = \frac{N_s.x}{S} \le \overline{\sigma_{bc}}$$

$$\sigma_{st} = \frac{n.N_s.(d - x)}{S} \le \overline{\sigma_{st}}$$

-Application : Soit une section rectangulaire soumise à l'E.L.S à un moment de flexion M_s = 0,08 MN et un effort de compression N_s = 0,15 MN. Si f_{c28} = 20 MPa et FeE400.

Si : $A_2 = 0$; A_1 = 4 HA 12 = 4,52 cm².

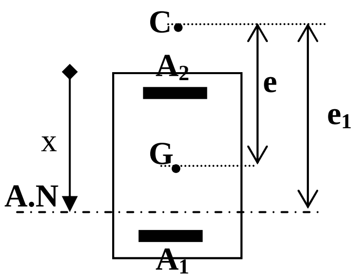
- Vérifiez les contraintes ?



- Solution :

- L'excentricité : $e = \frac{M}{N} = \frac{0,155}{0,2}$ = 0,553 m > $\frac{h}{6} = \frac{55}{2}$ = 0,092 m.

Nous avons une section partiellement comprimée.



$$e_1^3 + p.e_1 + q = 0$$ avec:

$$P = -3.\left(e - \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{6.n.A_2}{b}.\left(e - \frac{h}{2} + d'\right) + \frac{6.n.A_1}{b}.\left(e - \frac{h}{2} + d\right)$$

P = -735

$$q = 2.\left(e - \frac{h}{2}\right)^3 - \frac{6.n.A_2}{b}.\left(e - \frac{h}{2} + d'\right)^2 - \frac{6.n.A_1}{b}.\left(e - \frac{h}{2} + d\right)^2$$

q = -64100

Soit : $e_1 = \sqrt[3]{-p.e_1 - q}$

$e_1 = 0 \rightarrow e_1 = 40$

$e_1 = 40 \rightarrow e_1 = 45,39$

$e_1 = 45,39 \rightarrow e_1 = 46,02$

$e_1 = 46,02 \rightarrow e_1 = 46,09$

$e_1 = 46,09 \rightarrow e_1 = 46,10$ cm.

Soit : e_1 = 46,10 cm.

$$x = \frac{h}{2} + e_1 - e = \frac{55}{2} + 46,10 - 53,3 = 20,30 \text{ cm}$$

x = 20,30 cm

$$S = \frac{b.x^2}{2} + n.A_2.(x - d') - n.A_1.(d - x) = 0,003 \text{ m}^3$$

$$\sigma_{bc} = \frac{N_s.x}{S} = \frac{0,15 .\ 0,203}{0,003} = 10,2 \text{ MPa} < \overline{\sigma_{bc}} = 12 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{st} = \frac{n.N_s.(d - x)}{S} = \frac{15.\ 0,15.(0,52 - 0,203)}{0,003} = 238 \text{ MPa} > \overline{\sigma_{st}} = 201\, MPa$$

L'E.L.S n'est pas vérifié.